Julian Lang, Philipp Kötz & Dominik Lescher

17.3.6 Aufgabe 11)

Bestimmen Sie den Inhalt des 3-blättrigen Kleeblatts mit

$$R(\varphi) \leq \left|\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right|, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Skizzieren Sie.

Nach 17.3.6 Aufgabe 10 gilt für einen Sektor $S \subset \mathbb{R}^2$, der von zwei Strahlen α und β und einer in Polarkoordinaten durch $r = R(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, gegebenen Kurve berandet wird

$$A(S) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta R(\varphi)^2 d\varphi.$$

Für diese Aufgabe gilt nun $\alpha = 0 \leq \varphi \leq \beta = 2\pi$ sowie $R(\varphi) \leq \left|\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right|$, also

$$A(S) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left|\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right|^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)^2 d\varphi \overset{u=\frac{3\varphi}{2}}{=} \frac{1}{2}\cdot\int_0^{3\pi} \frac{2}{3}\sin(u)^2 du$$

partielle Integration

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\left[-\cos(u)\cdot\sin(u)\right]_0^{3\pi} + \int_0^{3\pi}\cos(u)^2 du\right) \overset{\cos^2 = 1-\sin^2}{=} \frac{1}{3}\cdot\left(\left[-\cos(u)\sin(u)\right]_0^{3\pi} + \int_0^{3\pi} 1 - \sin(u)^2 du\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left[-\cos(u)\cdot\sin(u) + u\right]_0^{3\pi} - \int_0^{3\pi}\sin(u)^2 du\right)$$

$+\frac{1}{3}\int_0^{3\pi}\sin(u)^2 du$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{3}\int_0^{3\pi}\sin(u)^2 du = \frac{1}{3}\left[-\cos(u)\sin(u) + u\right]_0^{3\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}\int_0^{3\pi}\sin(u)^2 du = \frac{1}{6}\left[-\cos(u)\sin(u) + u\right]_0^{3\pi} = \frac{1}{6}(3\pi - 0) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

Skizze: