Abgabe von: Daniel Kuller & Matea Rokov 14.11.2020

Gruppe 3: Abgabe 2

Aufgabe 5 aus 14.5

Aufgabenstellung:

5. Beweisen Sie, dass das Mengensystem

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{R}^n \ : \ A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich}\}$$

keine σ-Algebra auf dem $\mathbb{R}^n$ darstellt.

Wiederholung aus VL:

Definition: Sigma-Algebra
Ein System $\mathcal{A}$ von TMen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt eine σ-Algebra, wenn folgendes erfüllt ist:

(i) Es ist $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(ii) Ist $\Omega \in \mathcal{A}$, so gilt auch $\Omega^c \in \mathcal{A}$.

(iii) Sind abzählbar endlich oder unendlich viele $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \in \mathcal{A}$, so gilt auch

$$\bigcup_{i \geq 1} \Omega_i \in \mathcal{A}.$$

Lösung:

Wir überprüfen die Eigenschaften einer σ-Algebra:

(i) $A \in \mathcal{A}$, sei $A = \mathbb{R}^n \Rightarrow A$ ist nicht endlich

$\Rightarrow A^c = \emptyset$ (somit ist A^c endlich)

Schließlich folgt aus $A^c \in \mathcal{A}$ mit $A^c = \emptyset$, dass auch $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(ii)

Es gilt $A \in \mathcal{A}$ mit A endlich, dann ist $(A^c)^c = A$ endlich.
Weiterhin folgt für $A \in \mathcal{A}$ und A^c endlich sofort, dass $A^c \in \mathcal{A}$.

Also gilt $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

(iii) Mit $\mathbb{R}^n$ nicht endlich, existiert eine Abzählung $A_0 = \{a_1, a_2, \dots\}$ sodass A_0 <u>und</u> $\mathbb{R}^n \setminus A_0$ unendlich sind.
Es folgt, dass $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R}^n : A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich}\}$ keine σ-Algebra ist, denn

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{\{a_i\}}_{\in \mathcal{A}} = A_0 \notin \mathcal{A}.$$