Proposition I.4

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind und die von den gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel einander gleich, so ist die Grundlinie der Grundlinie gleich, das Dreieck ist dem Dreieck gleich, und die übrigen Winkel sind den übrigen Winkeln entsprechend gleich, nämlich solche, denen gleiche Seiten gegenüberliegen.

Beweis

Aufgabenstellung

Die zwei Seiten AB und AC des Dreiecks ABC seien gleich den Seiten DE bzw. DF des Dreiecks DEF, und es stimme der Winkel $\sphericalangle(CAB)$ mit dem Winkel $\sphericalangle(FDE)$ überein. Zu zeigen ist, dass dann auch gelten

$$BC = EF, \quad \sphericalangle(ABC) = \sphericalangle(DEF), \quad \sphericalangle(BCA) = \sphericalangle(EFD).$$

Betrachte dazu die nachstehende Abbildung.

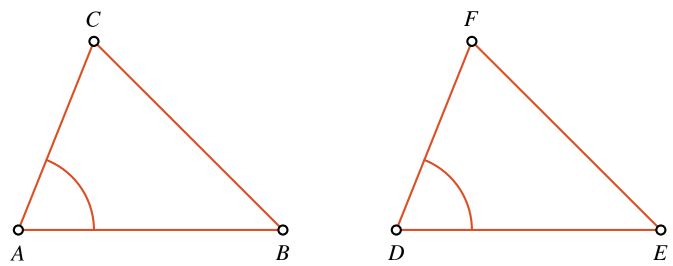

Abb.: Konstruktion zu Proposition I.4

Erster Beweisschritt

Der Beweis von Proposition I.4 beginnt nicht mit einer Beweis vorbereitenden Konstruktion, sondern mit einer im Anschluss an den Beweis auf ihre Zulässigkeit zu prüfenden geometrischen Operation:

1. Verschiebe das Dreieck ABC auf das Dreieck DEF (∗)

Zweiter Beweisschritt

2. Es ist $A = D$ (1)

3. Es ist $AB = DE$ (1)

Dritter Beweisschritt

4. Es ist $B = E$ (2, 3)
5. Es ist $AC = DF$ (1, 4)

Vierter Beweisschritt

6. Es ist $C = F$ (5)
7. Es ist $BC = EF$ (4, 6, Ax I.9)

Fünfter Beweisschritt

8. Es ist $ABC = DEF$ (3, 5, 7)
9. Es ist $\sphericalangle(ABC) = \sphericalangle(DEF)$ (8)
10. Es ist $\sphericalangle(BCA) = \sphericalangle(EFD)$ (8)

Mit (7), (9) und (10) ist der geforderte Beweis abgeschlossen. □

Diskussion

*Anmerkungen**

Der zentrale Kritikpunkt ist das in (1) geforderte *Verschieben* des Dreiecks ABC bzw. das *Übereinanderlegen* der Dreiecke ABC und DEF. Eine solche Superposition zweier geometrischer Figuren ist im Euklidischen Axiomensystem aber gar nicht vorgesehen und daher als Beweismittel auch nicht zulässig.

Es ist an dieser Stelle lohnenswert, mathematikhistorische Kritiken dieses Beweises im Originaltext zu studieren:

Bertrand Russell

Wir beginnen mit B. Russell[1]:

> **390.** The fourth proposition is the first in which Euclid employs the method of superposition – a method which, since he will make any *détour* to avoid it, he evidently dislikes, and rightly, since it has no logical validity, and strikes every intelligent child as a juggle. In the first place, to speak of motion implies that our triangles are not spatial, but material. For a point of space *is* a position, and can no more change its position than the leopard can change his spots. The motion of a point of space is a phantom directly contradictory to the law of identity: it is the supposition that a given point can be now one point and now another. Hence motion, in the ordinary sense, is only possible to matter, not to space. But in this case superposition proves no geometrical property. Suppose that the triangle *ABC* is by the window, and the side *AB* consists of the column of mercury in a thermometer;

[1] Russell, B.: *The principles of mathematics.* W.W. Norton, 1903, S. 405

suppose also that DEF is by the fire. Let us apply ABC to DEF as Euclid directs, and let AB just cover DE. Then we are to conclude that ABC and DEF, before motion, were equal in all respects. But if we had brought DEF to ABC, no such result would have followed. But how foolish! I shall be told; of course ABC and DEF are to be both rigid bodies. Well and good. But two little difficulties remain. In the first place – and for my opponent, who is an empirical philosopher, this point is serious – it is as certain as anything can be that there are no rigid bodies in the universe. In the second place – and if my opponent were not an empiricist, he would find this objection far more fatal – the meaning of rigidity presupposes a purely spatial metrical equality, logically independent of matter. For what is meant by a rigid body? It is one which, throughout a continuous portion of time, preserves all its metrical properties unchanged. Hence we incur a most fatally vicious circle if we attempt to define metrical properties by rigidity. If $\alpha\beta\gamma$ be a material triangle, which occupies at one time the space ABC, at another the space $A'B'C'$, to say that $\alpha\beta\gamma$ is rigid means that, however the two times be chosen (within some assigned period), the triangles ABC, $A'B'C'$ are equal in all respects. If we are to avoid this conclusion, we must define rigidity in some wholly non-geometrical manner. We may say, for example, that a rigid body *means* one whichis made of steel, or of brass. But then it becomes a logical error to regard brass eternal as slave to mortal rage; and if we define equal spaces as those which can be occupied by one and the same rigid body, the propositions of metrical Geometry will be one and all false.

The fact is that motion, as the word is used by geometers, has a meaning entirely different from that which it has in daily life, just as a variable, in mathematics, is not something which changes, but is usually, on the contrary, something incapable of change. So it is with motion. Motion is a certain class of one-one relations, each of which has every point of space for its extension, and each of which has a converse also belonging to the class. That is, a motion is a one-one relation, in which the referent and the relatum are both points, and in which every point may appear as referent and again as relatum. A motion is not this only: on the contrary, it has this further characteristic, that the metrical properties of any class of referent are identical with those of the corresponding class of relata. This characteristic, together with the other, defines a motion as used in Geometry, or rather, it defines a motion or a reflexion; but this point need not be elucidated at present. What is clear is, that a motion presupposes the existence, and cannot be used to define those properties. And it is this sense of the word *motion,* not the usual material sense, which is relevant to Euclid's use of superposition.

391. Returning now to Euclid's fourth proposition, we see that the superposition of ABC on DEF involves the following assumptions. (1) On the line DE there is a point E, on either side of D, such that $DE = AB$. This is provided for by the postulate about the circle. (2) On either side of the ray DE, there is a ray DF such that the angle EDF is equal to the angle BAC. This is required for the possibility of a triangle DEF such as the enunciation demands, but no axiom from which this follows can be found in Euclid. The problem, to construct an angle EDF equal to BAC, does not occur till I. 23, and there I. 4 is used in the proof. Hence the present assumption must be added to Euclid's axioms. It now follows that on DF there is a point F such that $DF = AC$. Hence the possibility of two such triangles as the enunciation demands is established. But in order to prove that DEF is equal in all respects to ABC, we need a further axiom, namely: With one angle at D, one side along the ray DE, and the other side to the right (or left) of DE, there exists a triangle which is equal in all respects to the triangle ABC. This is, in fact, the exact assumption which is concealed in the method of superposition. With this assumption, it finally becomes possible to prove that DEF is the triangle satisfying the above conditions and equal in all respects to ABC.

Thomas Little Heath

T.L. Heath[2] vermutet, dass Proposition I.4 *praktischer Natur* ist und eine *Anleitung* wiedergibt, nach welcher die Gleichheit zweier Figuren in der Praxis zu verifizieren ist. Genauer schreibt er:

> In the note on *Common Notion* 4 I have already mentioned that Euclid obviously used the method of superposition with reluctance, and I have given, after Veronese for the most part, the reason for holding that that method is not admissable as a *theoretical* means of proving equality, although it may be of use as a *practical* test, and may thus furnish an empirical basis on which to found a postulate. Mr Bertrand Russell observes (*Principles of Mathematics* I. p. 405) that Euclid would have done better to assume I.4 as an axiom, as is practically done by Hilbert (*Grundlagen der Geometrie,* p. 9). It may be that Euclid himself was as well aware of the objections to the method as are his modern critics; but at all events those objections were stated, with almost equal clearness, as early as the middle of the 16th century. Peletarius (Jacques Peletier) has a long note on this proposition (*In Euclidis elementa geometrica demonstrationum libri sex,* 1557), in which he observes that, if superposition of lines and figures could be assumed as a method of proof, the whole geometry would be full of such proofs, that it could equally well have been used in I.2 (thus in I.2 we could simply have supposed the line taken up and *placed* at the point), and that in short it is obvious how far removed the method is from the dignity of geometry. The theorem, he adds, is obvious in itself and does not require proof; although it is introduced as a theorem, it would seem that Euclid intended it rather as a *definition* than a theorem, "for I cannot think that two angles are equal unless I have a conception of what equality of angles is".

Max Simon

Lesenswert sind auch M. Simons Kommentare[3]:

> Beim Beweis dieses Satzes, des ersten Kongruenzsatzes, ist die Bewegung zu Hilfe genommen, und zwar nur bei diesem planimetrischen Satz und seiner Umkehrung I,8. Der ganze Beweis macht schon wegen der späteren Fassung des Axioms 1: Zwei Gerade schließen keinen Raum ein, den Eindruck einer späteren Redaktion; vielleicht durch Heron, dem als Mechaniker die Bewegung das Vertauteste war. Getadelt ist von Savile die Deckung der Winkel, da noch nicht gelehrt ist, wie man einen Winkel anträgt. Merkwürdigerweise hat weder Proclus noch Savile, nach Pfleiderer, der so fleißige Scholiast, auf die auffällige Anwendung der Bewegung hingewiesen. Sieht man näher zu, so ist nichts weiter benutzt als das stillschweigend angenommene Axiom von der Gleichförmigkeit des Raumes, demzufolge jede Figur, die an einer Stelle des Raumes möglich ist, auch an einer andern möglich ist, bezw. das Axiom Bolzano's und Graßmanns: Größen, deren bestimmende Stücke gleich sind, sind gleich. Die Kongruenz der dritten Seiten würde aus der Forderung 1: nach der zwischen je zwei Punkten eine Gerade vorhanden, sofort hervorgehen. Stillschweigend wird auch die Gleichheit zweier Winkel definiert: Winkel sind gleich, wenn sich ihre Schenkel decken.
>
> Daß Euclid die Kongruenzsätze nicht unter die Forderungen aufgenommen hat, ist ein Fehler.

[2] Heath, T.L.: *The thirteen books of Euclid.* Dover, 1956, S. 249

[3] Simon, M.: *Euclid und die sechs planimetrischen Bücher.* B.G. Teubner, 1901, S. 44 f.

Clemens Thaer

Wir wollen auch aus C. Thaers Euklidkommentaren vortragen[4]:

> Der vorliegende Beweis und der von I, 8 sind die einzigen des ersten Buches, in denen Euklid eine starre Figur als Ganzes bewegt (auch III, 24). Er hat, wie aus der Behandlung von I, 2 hervorgeht, offenbar eine Abneigung gegen diese Art der Beweisführung, und zwar mit gutem Grund, da eine vollständige Aussprache der zu ihrer Sicherung notwendigen Voraussetzungen zeigen würde, daß er den wesentlichen Inhalt des zu beweisenden Satzes wie D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1899, unter die Postulate aufnehmen müßte; eine verwandte Bemerkung macht schon Peletarius (1557). Auch fällt als inkonsequent auf, daß Euklid, der die Existenz gleicher Strecken an beliebiger Stelle durch I, 2 vorher sichert, dasselbe nicht auch für Winkel tut.
> Seinen Ausdruck für kongruent „gleich und ähnlich“ führt Euklid erst im VI. Buche ein, zunächst will er aus der Deckung nur auf gleiche Größen schließen.

Arthur Schopenhauer

Eine besondere Stellung nimmt schließlich der mathematisch interessierte Philosoph A. Schopenhauer ein[5]:

> Die Eukleidische Demonstrirmethode hat aus ihrem eigenen Schooß ihre treffendeste Parodie und Karikatur geboren, an der berühmten Streitigkeit über die Theorie der *Parallelen* und den sich jedes Jahr wiederholenden Versuchen, das elfte Axiom zu beweisen. Dieses nämlich besagt, und zwar durch das mittelbare Merkmal einer schneidenden dritten Linie, daß zwei sich gegen einander neigende (denn dies eben heißt „kleiner als zwei rechte seyn“), wenn genugsam verlängert, zusammentreffen müssen; welche Wahrheit nun zu komplicirt seyn soll, um für selbstevident zu gelten, daher sie eines Beweises bedarf, der nun aber nicht aufzubringen ist; eben weil es nichts Unmittelbareres giebt. Mich erinnert dieser Gewissensskrupel an die Schillersche Rechtsfrage:
>
> > Jahre lang schon bedien’ ich mich meiner Nase zum Riechen:
> > Hab’ ich denn wirklich an sie auch ein erweisliches Recht?
>
> ja, mir scheint, daß die logische Methode sich hiedurch bis zu Niaiserie steigere. Aber gerade durch die Streitigkeien darüber, nebst den vergeblichen Versuchen, das *unmittelbar* Gewisse als bloß *mittelbar* gewiß darzustellen, tritt die Selbstständigkeit und Klarheit der intuitiven Evidenz mit der Nutzlosigkeit und Schwierigkeit der logischen Ueberführung in einen Kontrast, der nicht weniger belehrend, als belustigend ist. Man will hier nämlich die unmittelbare Gewißheit deshalb nicht gelten lassen, weil sie kein bloß logische, aus dem Begriffe folgende, also allein auf dem Verhältniß des Prädikats zum Subjekt, nach dem Satze vom Widerspruch, beruhende ist. Nun ist aber jenes Axiom ein synthetischer Satz *a priori* und hat als solcher die Gewährleistung der reinen, nicht empirischen Anschauung, die eben so unmittelbar und sicher ist, wie der Satz vom Widerspruch selbst, von welchem alle Beweise ihre Gewißheit erst zur Lehn haben. Im Grunde gilt dies von jedem geometrischen Theorem, und es ist willkürlich, wo man hier die Gränze zwischen dem unmittelbar Gewissen und dem erst zu Beweisenden ziehn will. – Mich wundert, daß man nicht vielmehr das achte Axiom angreift: „Figuren, die sich decken, sind einander gleich“. Denn das *Sichdecken* ist entweder eine bloße Tautologie, oder etwas ganz Empirisches, welches nicht der reinen Anschauung, sondern der äußern sinnlichen Erfahrung angehört. Es setzt

---

[4] Thaer, C.: *Euklid. Die Elemente.* Friedr. Vieweg & Sohn GmbH, 1969, S. 419f.

[5] Schopenhauer, A.: *Die Welt als Wille und Vorstellung.* Anaconda-Verlag, 2009, Kap. 13

> nämlich Beweglichkeit der Figuren voraus; aber das Bewegliche im Raum ist allein die Materie. Mithin verläßt dies Provociren auf das Sichdecken den reinen Raum, das alleinige Element der Geometrie, um zum Materiellen und Empirischen überzugehn.

War Schopenhauer tatsächlich der erste Euklidkritiker, dem dieser kritische Punkt aufgefallen ist? M. Simon[6], lässt sich jedenfalls in Anbetracht dieser Ausführungen zu dem Schluss hinreißen:

> Sch. hat Euclid gar nicht verstanden.

---

[6] Simon, M.: *Euclid und die sechs planimetrischen Bücher.* B.G. Teubner, 1901, S. 39 f.